Aufgabe 55: In geeigneten Koordinaten nehmen die Gleichungen für den gedämpften harmonischen Oszillator die Form (4)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{\vec{q}} = \omega \hat{A} \vec{q}$$

für den „Phasenraum-Vektor“ $\vec{q} \doteq (x, p)^\top$ mit der angegebenen Matrix A an. Sie haben die allgemeine Lösung $\vec{q}(t) = \exp(\omega t \hat{A})\, \vec{q}(0)$ zu den Anfangswerten $x(0)$ und $p(0)$.

(a) Machen Sie zur Auswertung der Matrix-Exponentialfunkton Gebrauch von der Identität $\exp(M) = U^{-1} \exp(UMU^{-1})\, U$ mit einer geeigneten invertierbaren Matrix U. Die rechte Seite lässt sich leicht auswerten, falls UMU^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie U in geeigneter Weise und geben Sie damit die allgemeine Lösung an.

(c) Welche qualitativ verschiedenen Lösungen erhalten Sie für $x(0) = x_0$ und $p(0) = 0$ in Abhängigkeit von γ ? Skizzieren Sie diese Lösungskurven in der xp-Ebene („Phasenraum“) und markieren Sie den Durchlaufsinn.

Hinweis: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe 56: Ein Beobachter A sitzt in einem Ruderboot bei $\vec{r} \doteq (x_0, 0)$ mit $x_0 < 0$ und sieht seinen Freund B mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der y-Achse vorbeischwimmen. Zum Zeitpunkt t_0=0 passiert B and Ursprung, und A macht sich mit der konstanten Geschwindigkeit $w > v$ auf die Verfolgung. Seine präzisen Ruderbewegungen erlauben es A, zu jedem Zeitpunkt in die momentane Richtung zu B zu fahren. (4)

(a) Bestimmen Sie die Differenzialgleichung für die resultierende Verfolgungsbahn $y(x)$. Parametrisieren Sie dazu zunächst die Bahnkurven von A und B mit t. Sie erhalten zwei Gleichungen aus den Eigenschaften, dass As Geschwindigkeitsvektor auf B zeigt und die Länge w hat. Eliminieren Sie t durch Differenzieren (Steigung = ?) und $\dot{x}$ durch Einsetzen, um eine Differenzialgleichung erster Ordnung für $z = y'$ zu erhalten.

(b) Lösen Sie die Differenzialgleichung für z und integrieren Sie dann für y (Anfangswerte?).

(c) Wo treffen sich A und B?

Hinweis: $(1+z^2)^{-1/2} = \partial_z \text{arsinh}\, z = \partial_z \ln(z + \sqrt{1+z^2})$.

Aufgabe 57: (4)

(a) Bei welcher Wahl der Konstanten wird die folgende Strömung im Maschsee wirbelfrei?

$$\vec{v} \doteq (\, \alpha_1 x + (\beta-\gamma)\, y \,,\ (\beta+\gamma)\, x + \alpha_2 y \,,\ 0\,)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Forderung nach Wirbelfreiheit des Feldes $\vec{v}(x, y) \doteq f(x)\,(y, x, 0)$ die Funktion $f(x)$ bis auf einen konstanten Faktor festlegt.

(c) Zu welchem Wert der Konstanten α ist das Feld $(\alpha z\, \vec{r} - r^2 \vec{e}_3)/r^5$ wirbelfrei? (Ursprung ausgenommen. Es handelt sich um das elektrische Feld eines Dipols am Ursprung.)

(d) Eine Strömung der Form $\vec{v}(\vec{r}) \doteq (0, v_2(\vec{r}), 0)$ soll die Wirbelstärke $\vec{\text{rot}}\, \vec{v} = \alpha\, \vec{e}_3\, \delta(x)$ haben. Bestimmen Sie $v_2(\vec{r})$ so allgemein wie möglich. Berücksichtigen Sie dabei die etwaige y-Abhängigkeit von v_2. Auch die Forderung nach Quellenfreiheit legt v_2 noch nicht restlos fest. Skizzieren Sie zwei Strömungsbilder. (Es handelt sich um mögliche Magnetfelder an einem in z-Richtung stromdurchflossenen Blech in der yz-Ebene.)

- Ihre Bearbeitung dieser Aufgaben hat bequem auf zwei DIN A4 Blättern Platz.
- Abgabe am Montag, dem 06.04.09 im GPHY v o r Vorlesungsbeginn.
- Bitte heften Sie einen Zettel mit **Name, Vorname, Matr.Nr. und Studiengang** (ggf. „Junior, X-te Klasse") an, den wir abreißen und behalten dürfen. Daraufhin sind Sie „eingespeist". Auf der Bearbeitung selbst soll — auch künftig — nur noch Ihr Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe erscheinen : rechts oben und in Blockschrift.
- Es sind a l l e Aufgaben zu lösen, und zwar a l l e i n .
- Es wurden zehn Übungsgruppen (Tutorien) für Präsenzübungen eingerichtet, die freitags zwischen 08 und 16 Uhr liegen. Zur Teilnahme und Korrektur Ihrer Hausübungen tragen Sie sich bitte im stud.IP in eine dieser Gruppen ein.
- Klausur am Samstag , dem 27.06.2009, um 10^{oo}–13^{oo}.
- Für den erfolgreichen Abschluss des Moduls „Einführung in die Physik II" ist neben dem Bestehen der Klausur u.a. die regelmäßige Mitarbeit in den Übungsgruppen und das Erreichen von ≥ 60 Hausübungs–Punkten erforderlich.